GUIA MANGÁ DE
CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL

HIROYUKI KOJIMA
SHIN TOGAMI
BECOM CO., LTD.

Ohmsha
no starch press
novatec

Editor: Rubens Prates
Ilustração: Shin Togami
Tradução: Edgard B. Damiani
Revisão técnica: Peter Jandl Jr.
Editoração eletrônica: Camila Kuwabata e Carolina Kuwabata

ISBN: 978-85-7522-208-9

Histórico de impressões:

Fevereiro/2012 Segunda reimpressão
Novembro/2010 Primeira reimpressão
Março/2010 Primeira edição

NOVATEC EDITORA LTDA.

Rua Luís Antônio dos Santos 110
02460-000 – São Paulo, SP – Brasil
Tel.: +55 11 2959-6529
Fax: +55 11 2950-8869
E-mail: novatec@novatec.com.br
Site: www.novatec.com.br
Twitter: twitter.com/novateceditora
Facebook: facebook.com/novatec
LinkedIn: linkedin.com/in/novatec

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Kojima, Hiroyuki
Guia mangá de cálculo : diferencial e integral / Hiroyuki Kojima, Shin Togami, Becom Co ; [ilutrações] Shin Togami ; [tradução Edgard B. Damiani]. -- São Paulo : Novatec Editora ; Tokyo : Ohmsha ; São Francisco : No Starch Press, 2010. -- (The manga guide)

Título original: The manga guide to calculus.
ISBN 978-85-7522-208-9

1. Cálculo 2. Cálculo - Problemas, exercícios etc. 3. Cálculo diferencial 4. Cálculo integral 5. História em quadrinhos 6. Matemática - História em quadrinhos I. Togami, Shin. II. Becom Co.. III. Título. IV. Série.

10-01418 CDD-515

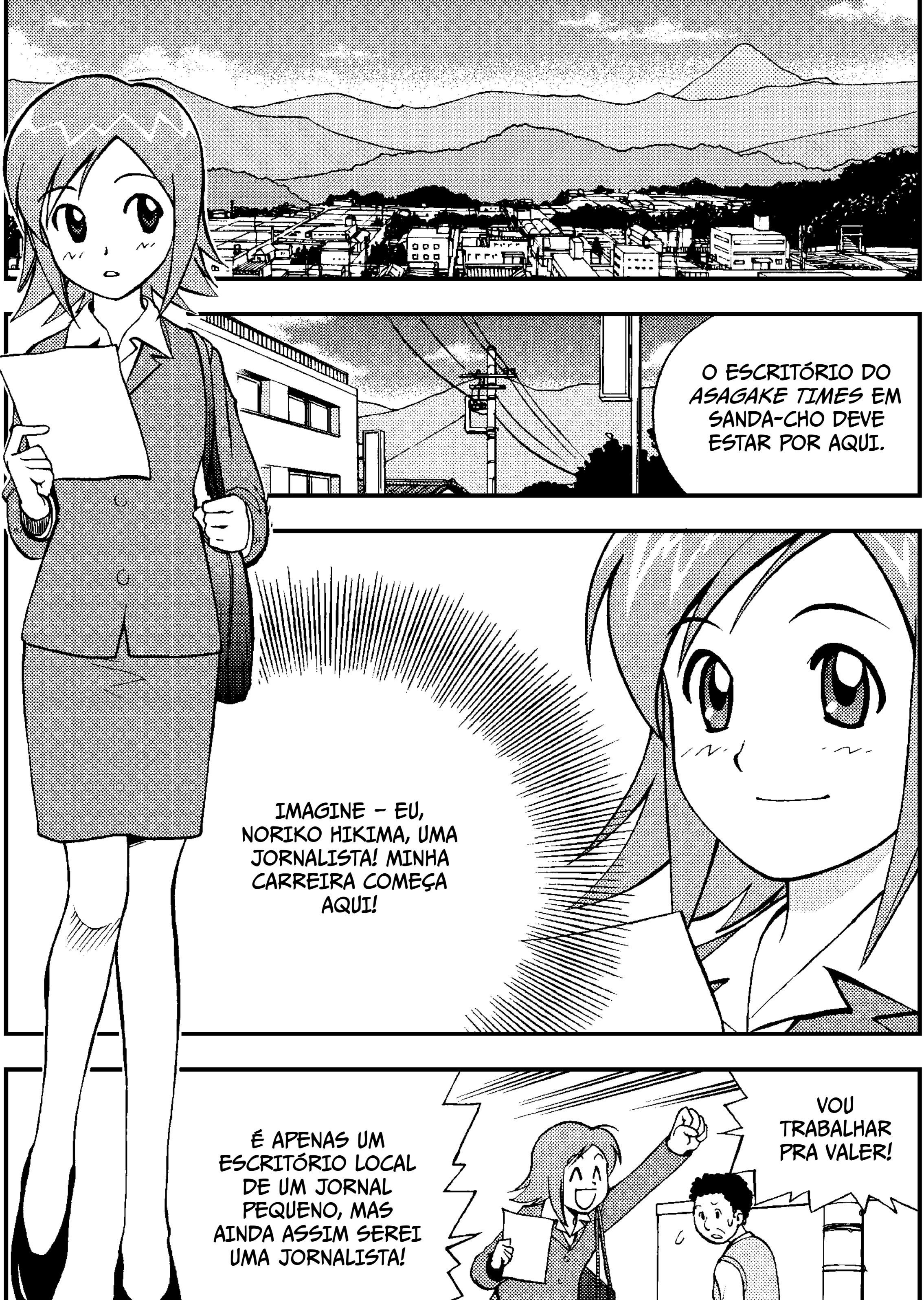
Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo : Matemática em quadrinhos 515

PRL20120203

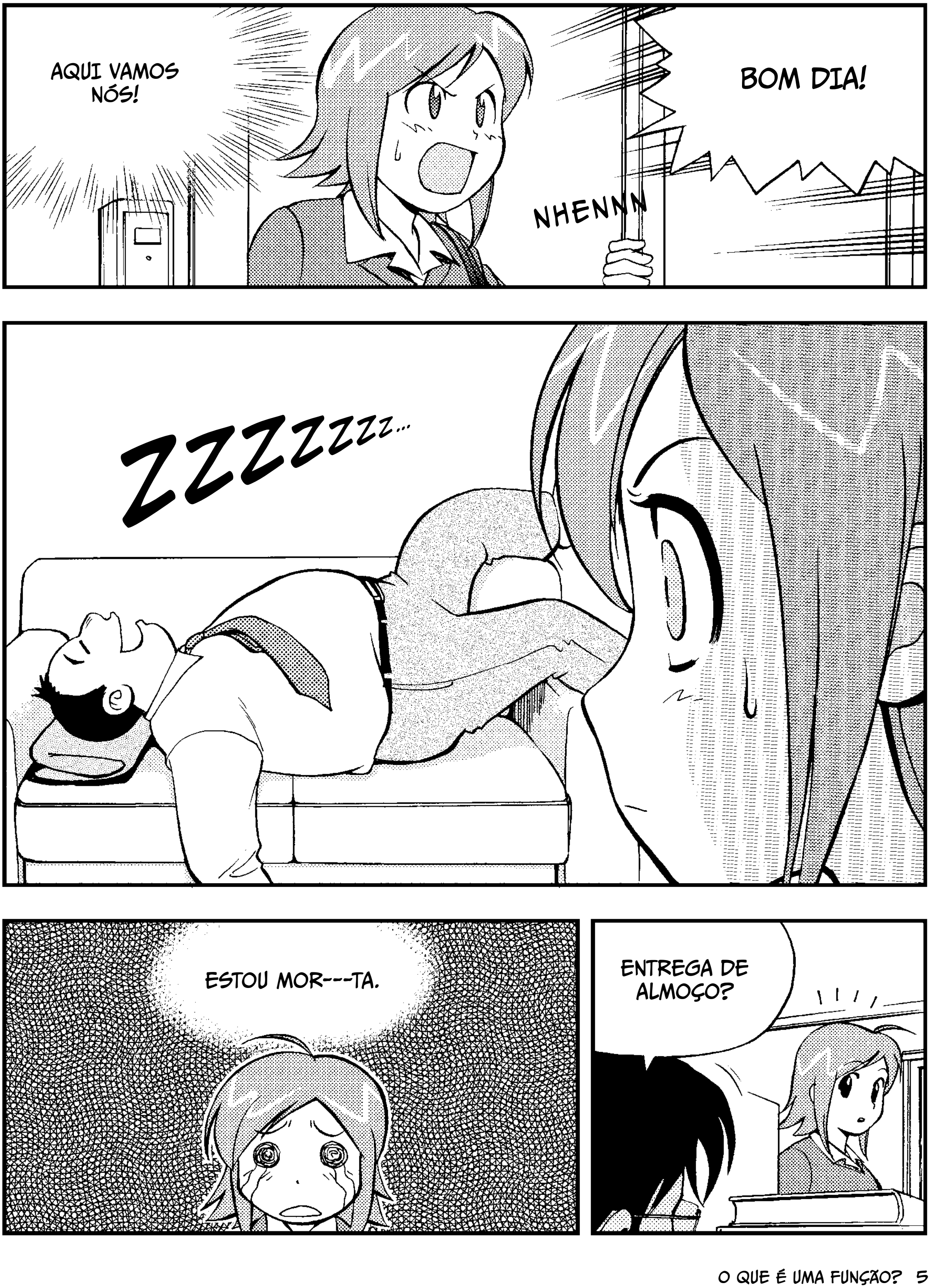
SUMÁRIO

PRÓLOGO:
O QUE É UMA FUNÇÃO?

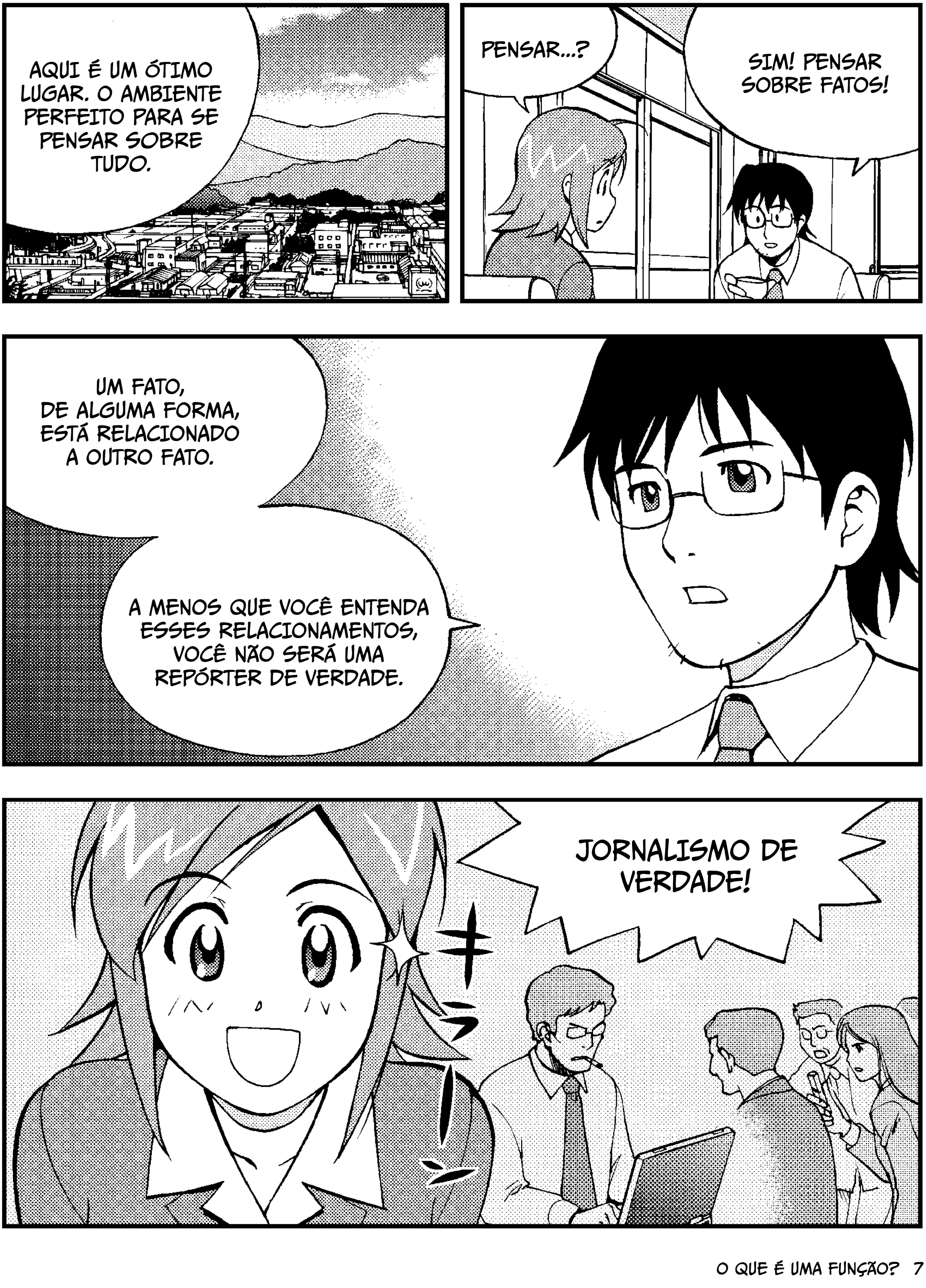

O ESCRITÓRIO DO *ASAGAKE TIMES* EM SANDA-CHO DEVE ESTAR POR AQUI.
IMAGINE – EU, NORIKO HIKIMA, UMA JORNALISTA! MINHA CARREIRA COMEÇA AQUI!
VOU TRABALHAR PRA VALER!
É APENAS UM ESCRITÓRIO LOCAL DE UM JORNAL PEQUENO, MAS AINDA ASSIM SEREI UMA JORNALISTA!

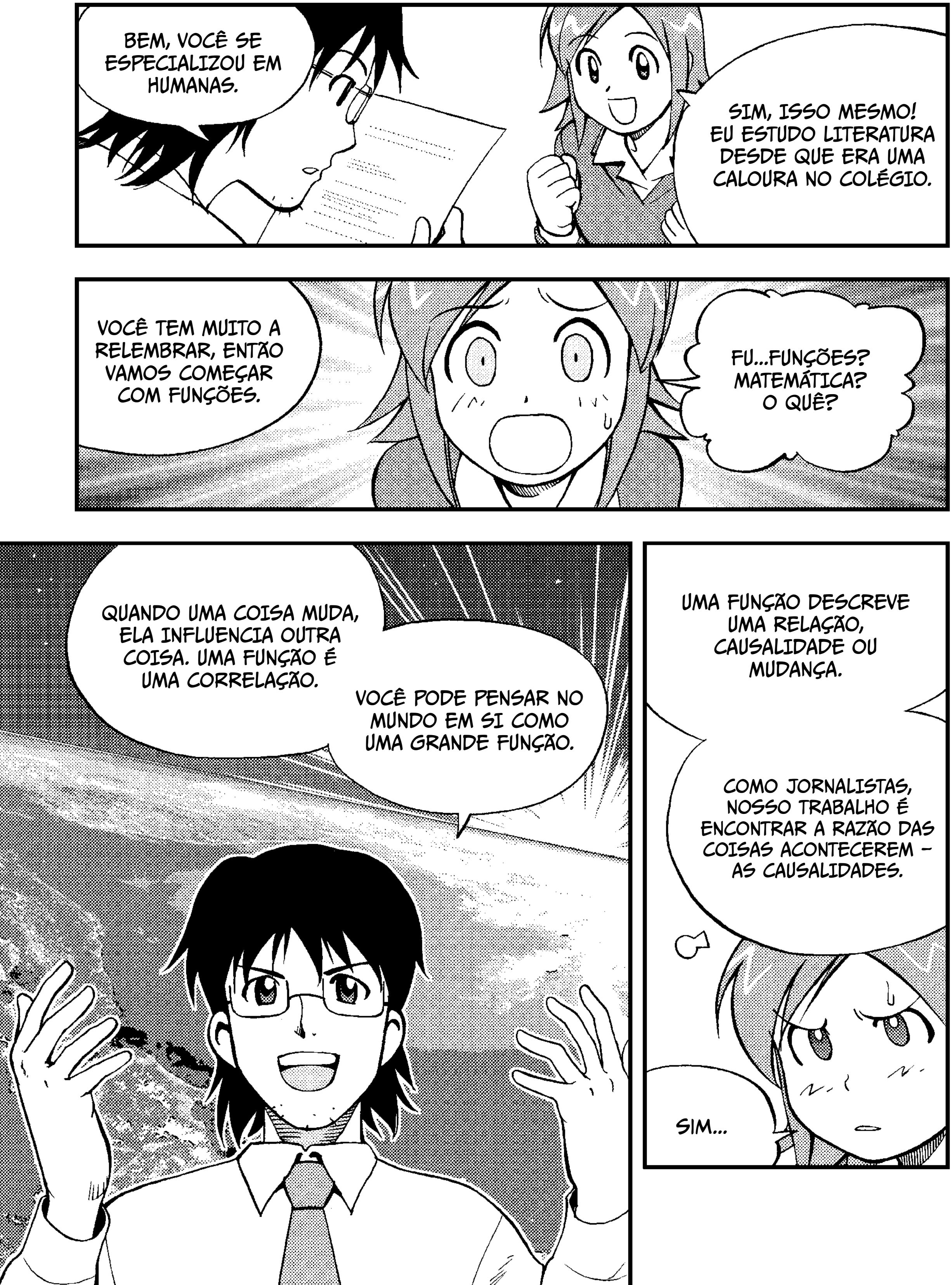

O DISTRIBUIDOR DO *ASAGAKE TIMES* EM SANDA-CHO
あさがけ新聞
算田町
UM DISTRIBUIDOR DE JORNAL?
ESCRITÓRIO SANDA-CHO...SERÁ QUE EU PEGUEI O MAPA ERRADO?
FICA LOGO ALI.
VOCÊ ESTÁ PROCURANDO PELO ESCRITÓRIO LOCAL SANDA-CHO, CERTO? TODO MUNDO NOS CONFUNDE COM O ESCRITÓRIO PORQUE SOMOS MAIORES.

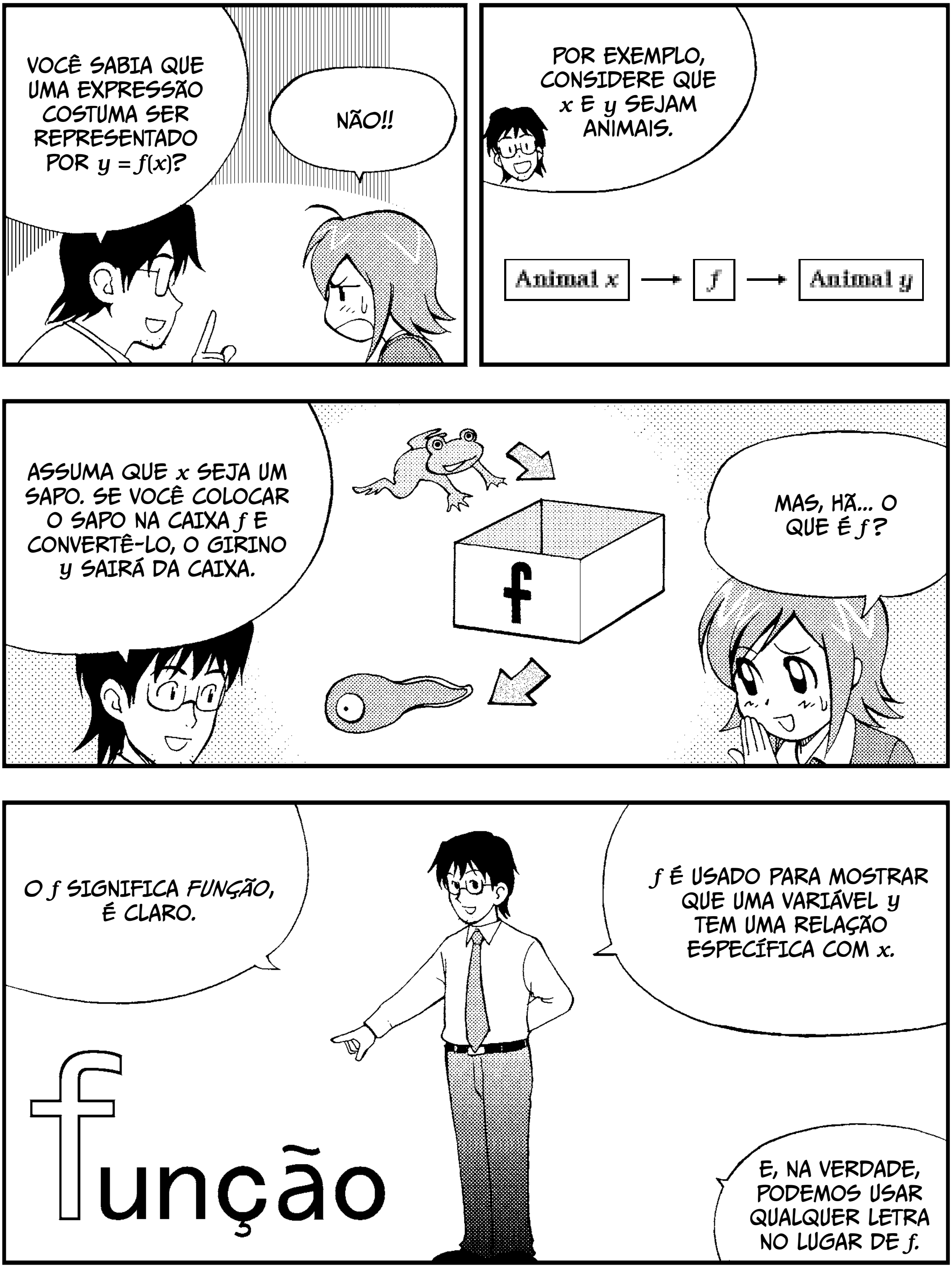
O ESCRITÓRIO LOCAL EM SANDA-CHO DO *ASAGAKE TIMES*
あさがけ新聞
算田町支局
ハラ…
HUUUHH
OH, NÃO! É UM GALPÃO!
プレハブじゃん
NÃO... NÃO SE IRRITE, NORIKO.
É UM ESCRITÓRIO LOCAL, MAS AINDA É O VERDADEIRO *ASAGAKE TIMES.*


AQUI VAMOS NÓS!
BOM DIA!
NHENNN
ZZZZZzzz...
ESTOU MOR---TA.
ENTREGA DE ALMOÇO?

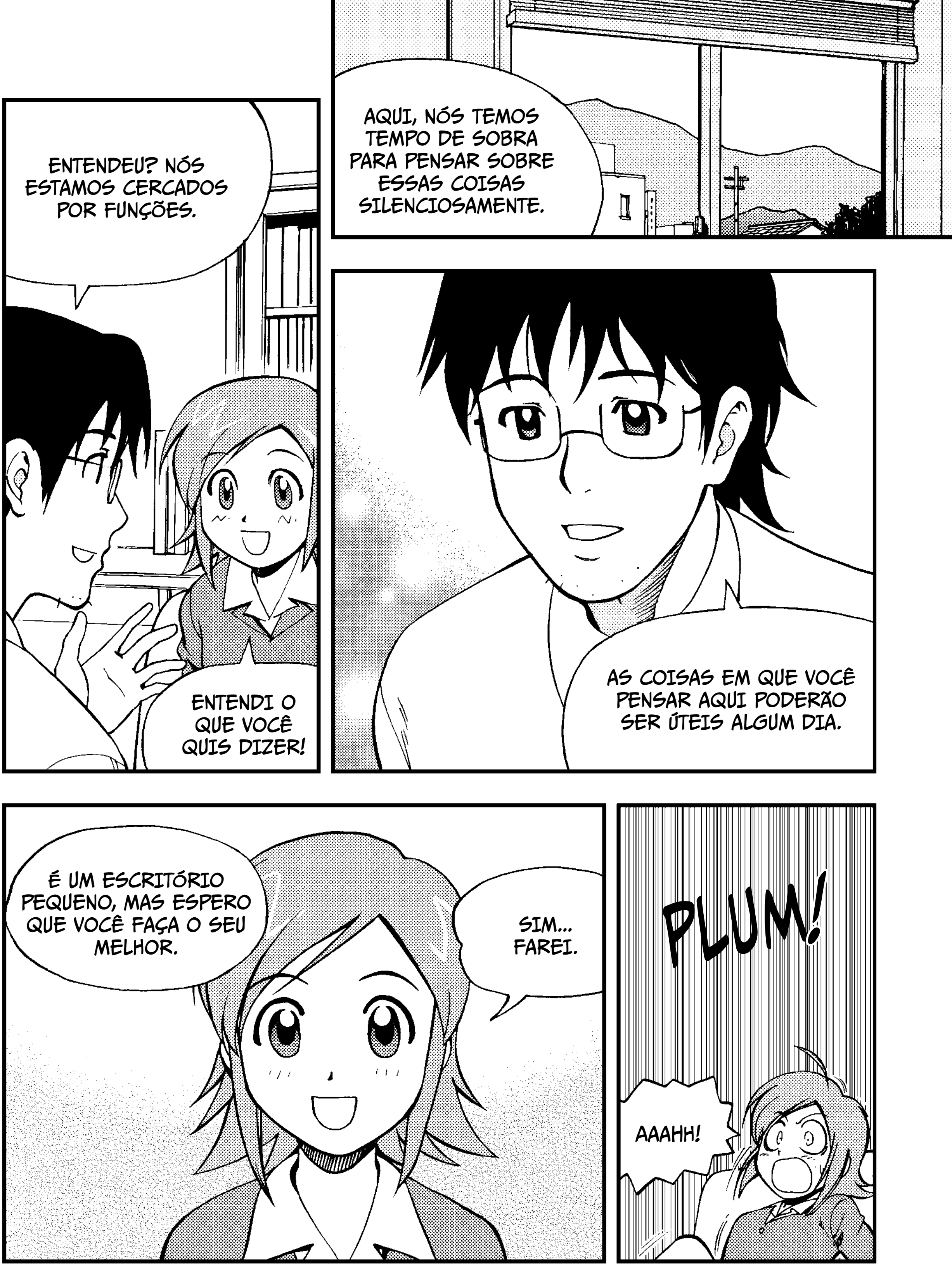

PODE DEIXAR AÍ, POR FAVOR?
ESPERE, O QUÊ?
AH, VOCÊ FOI DESIGNADA PARA TRABALHAR AQUI.
EU SOU NORIKO HIKIMA.
VIAGEM LONGA, NÃO? EU SOU KAKERU SEKI, O CHEFE DESTE ESCRITÓRIO.
O GRANDÃO ALI É FUTOSHI MASUI, MEU ÚNICO SOLDADO.
くか～
APENAS DOIS...


AQUI É UM ÓTIMO LUGAR. O AMBIENTE PERFEITO PARA SE PENSAR SOBRE TUDO.
PENSAR...?
SIM! PENSAR SOBRE FATOS!
UM FATO, DE ALGUMA FORMA, ESTÁ RELACIONADO A OUTRO FATO.
A MENOS QUE VOCÊ ENTENDA ESSES RELACIONAMENTOS, VOCÊ NÃO SERÁ UMA REPÓRTER DE VERDADE.
JORNALISMO DE VERDADE!


BEM, VOCÊ SE ESPECIALIZOU EM HUMANAS.
SIM, ISSO MESMO! EU ESTUDO LITERATURA DESDE QUE ERA UMA CALOURA NO COLÉGIO.
VOCÊ TEM MUITO A RELEMBRAR, ENTÃO VAMOS COMEÇAR COM FUNÇÕES.
FU...FUNÇÕES? MATEMÁTICA? O QUÊ?
QUANDO UMA COISA MUDA, ELA INFLUENCIA OUTRA COISA. UMA FUNÇÃO É UMA CORRELAÇÃO.
VOCÊ PODE PENSAR NO MUNDO EM SI COMO UMA GRANDE FUNÇÃO.
UMA FUNÇÃO DESCREVE UMA RELAÇÃO, CAUSALIDADE OU MUDANÇA.
COMO JORNALISTAS, NOSSO TRABALHO É ENCONTRAR A RAZÃO DAS COISAS ACONTECEREM – AS CAUSALIDADES.
SIM...


VOCÊ SABIA QUE UMA EXPRESSÃO COSTUMA SER REPRESENTADO POR $y = f(x)$?
NÃO!!
POR EXEMPLO, CONSIDERE QUE x E y SEJAM ANIMAIS.
Animal x → f → Animal y
ASSUMA QUE x SEJA UM SAPO. SE VOCÊ COLOCAR O SAPO NA CAIXA f E CONVERTÊ-LO, O GIRINO y SAIRÁ DA CAIXA.
f
MAS, HÃ... O QUE É f?
O f SIGNIFICA *FUNÇÃO*, É CLARO.
f É USADO PARA MOSTRAR QUE UMA VARIÁVEL y TEM UMA RELAÇÃO ESPECÍFICA COM x.
função
E, NA VERDADE, PODEMOS USAR QUALQUER LETRA NO LUGAR DE f.


NESSE CASO, f EXPRESSA A RELAÇÃO OU REGRA ENTRE "UM PAI" E "UMA PROLE"
UM PAI
f
UMA PROLE
E ESSA RELAÇÃO É VERDADE PARA QUASE TODOS OS ANIMAIS. SE x É UM PÁSSARO, y É UM FILHOTE DE PÁSSARO.
CORRETO! AGORA OLHE PARA ISSO.
Venda de caviar cai durante recessão
POR EXEMPLO, A RELAÇÃO ENTRE RENDIMENTOS E DESPESAS PODE SER VISTA COMO UMA FUNÇÃO.
COMO QUANDO AS VENDAS DE UMA COMPANHIA SOBEM, OS FUNCIONÁRIOS RECEBEM BÔNUS?
JATO SUPERSÔNICO X-43 ALCANÇA MACH 9,6 – NOVO RECORDE MUNDIAL
A VELOCIDADE DO SOM E A TEMPERATURA TAMBÉM PODEM SER EXPRESSAS COMO UMA FUNÇÃO. QUANDO A TEMPERATURA SOBE 1°C, A VELOCIDADE DO SOM SOBE 0,6 METROS/SEGUNDO.
IÚÚ-RÚÚ!
E A TEMPERATURA NAS MONTANHAS CAI CERCA DE 0,5°C PARA CADA 100 METROS QUE VOCÊ SOBE, NÃO É?


ENTENDEU? NÓS ESTAMOS CERCADOS POR FUNÇÕES.
AQUI, NÓS TEMOS TEMPO DE SOBRA PARA PENSAR SOBRE ESSAS COISAS SILENCIOSAMENTE.
AS COISAS EM QUE VOCÊ PENSAR AQUI PODERÃO SER ÚTEIS ALGUM DIA.
ENTENDI O QUE VOCÊ QUIS DIZER!
É UM ESCRITÓRIO PEQUENO, MAS ESPERO QUE VOCÊ FAÇA O SEU MELHOR.
SIM... FAREI.
PLUM!
AAAHH!

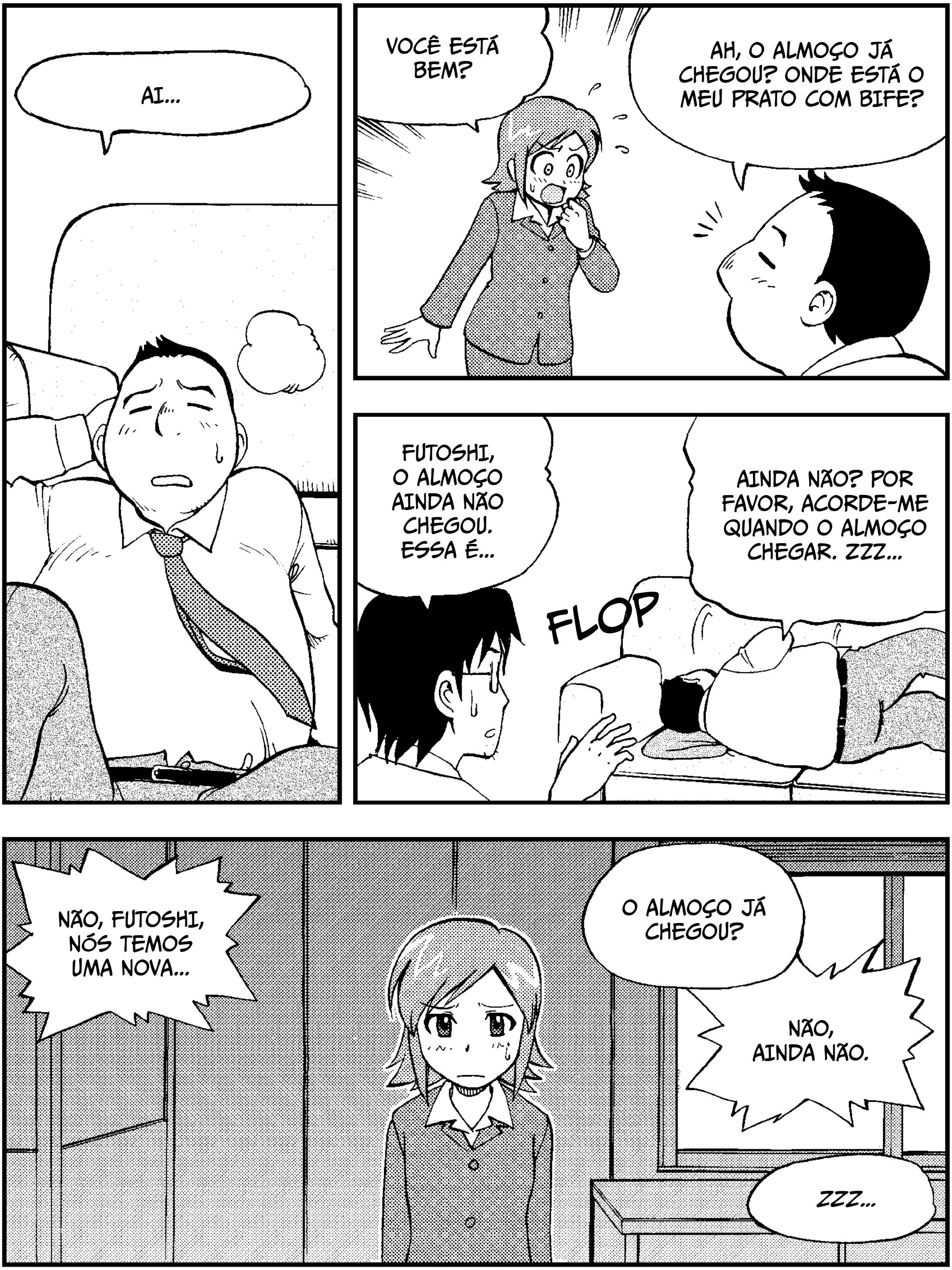
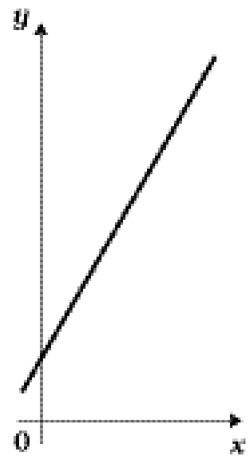
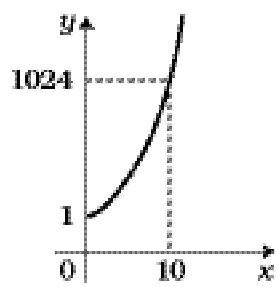
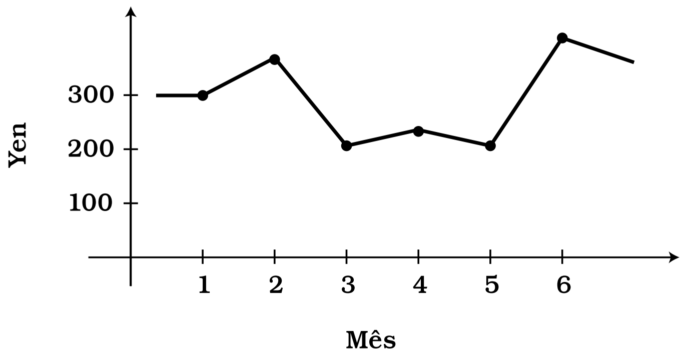

AI...
VOCÊ ESTÁ BEM?
AH, O ALMOÇO JÁ CHEGOU? ONDE ESTÁ O MEU PRATO COM BIFE?
FUTOSHI, O ALMOÇO AINDA NÃO CHEGOU. ESSA É...
AINDA NÃO? POR FAVOR, ACORDE-ME QUANDO O ALMOÇO CHEGAR. ZZZ...
FLOP
NÃO, FUTOSHI, NÓS TEMOS UMA NOVA...
O ALMOÇO JÁ CHEGOU?
NÃO, AINDA NÃO.
ZZZ...

TABELA 1: CARACTERÍSTICAS DAS FUNÇÕES

ASSUNTO	CÁLCULO	GRÁFICO
Causalidade	A frequência do estridular de um grilo é determinada pela temperatura. Podemos expressar aproximadamente a relação entre y estrídulos por minuto de um grilo com a temperatura x°C como $y = g(x) = 7x - 30$ $x = 27°$ $\quad 7 \times 27 - 30$ O resultado é 159 estrídulos por minuto.	Quando desenhamos essas funções, o resultado é uma linha reta. É por isso que as chamamos de funções lineares. 
Mudanças	A velocidade do som y em metros por segundo (m/s) no ar a x°C é expressa como $y = v(x) = 0{,}6x + 331$ A 15°C, $y = v(15) = 0{,}6 \times 15 + 331 = 340$ m/s A –5°C, $y = v(-5) = 0{,}6 \times (-5) + 331 = 328$ m/s	
Conversão de Unidade	Conversão de x graus Fahrenheit (°F) em y graus Celsius (°C) $y = f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ Então agora sabemos que 50°F equivalem a $\frac{5}{9}(50 - 32) = 10°C$	
	Computadores armazenam números usando um sistema binário (1s e 0s). um número binário com x bits (ou dígitos binários) tem o potencial de armazenar y números distintos. $y = b(x) = 2^x$ (Isso é descrito com mais detalhes na página 131.)	O gráfico é uma função exponencial. 

OS GRÁFICOS DE ALGUMAS FUNÇÕES NÃO PODEM SER EXPRESSOS POR LINHAS RETAS OU CURVAS COM FORMA REGULAR.

O preço P das ações da companhia A no mês x de 2009 é
$y = P(x)$



$P(x)$ não pode ser expressa por uma função conhecida, mas ainda assim é uma função.

Se conseguisse encontrar uma maneira de prever $P(7)$, o preço das ações em julho, você poderia ter um grande lucro.

A COMBINAÇÃO DE DUAS OU MAIS FUNÇÕES É CHAMADA DE "COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES". A COMBINAÇÃO DE FUNÇÕES NOS PERMITE EXPANDIR O ESCOPO DE CAUSALIDADE.

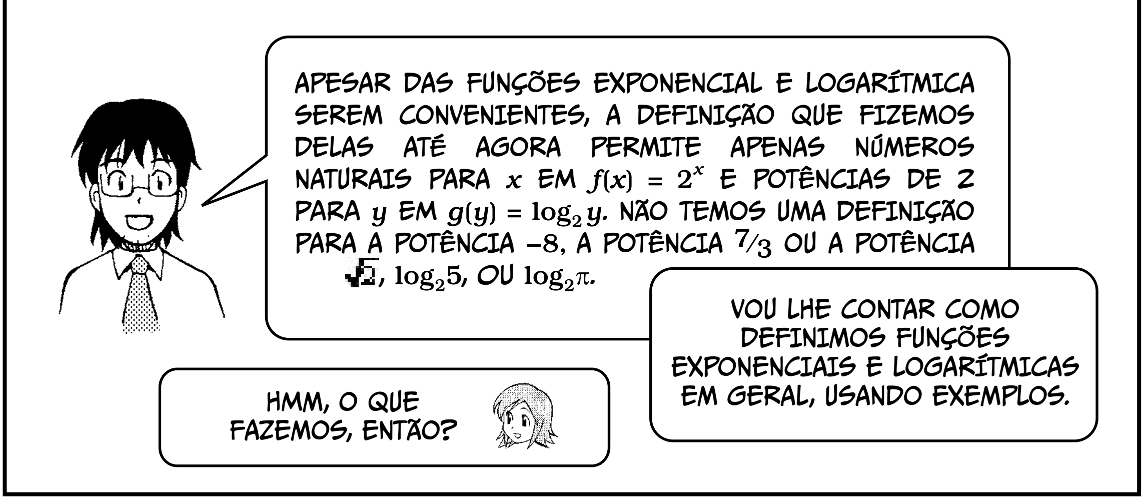
Uma função composta de f e g

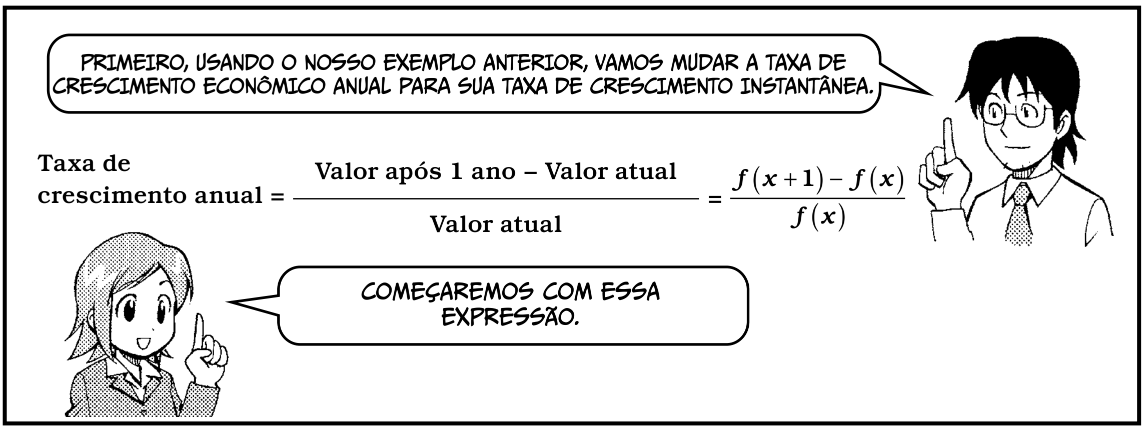
$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x) \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow g(f(x))$$

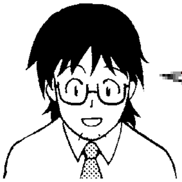
EXERCÍCIO

1. **Encontre uma equação que expresse a frequência de z estrídulos/minuto de um grilo a x°F.**

GENERALIZANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS







Taxa de crescimento instantânea

$$= \text{Idealização de } \left(\frac{\text{Valor um pouco mais tarde} - \text{Valor atual}}{\text{Valor atual}} \div \text{Tempo decorrido} \right)$$

$$= \textbf{Resultado obtido usando } \varepsilon \to 0 \textbf{ em} \left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{f(x)} \right) \frac{1}{\varepsilon}$$

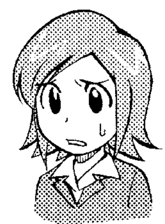
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{f(x)} \left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

Agora, vamos considerar uma função que satisfaça a taxa de crescimento instantânea quando ela é constante, ou

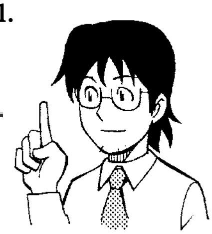
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c \quad \text{em que } c \text{ é uma constante.}$$

Aqui assumimos que $c = 1$,
e encontraremos $f(x)$ que satisfaça

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$



1. Primeiro, chutamos que isso seja uma função exponencial.



De ❶, temos que $f(h) \approx f(0)h + f(0)$ e ficamos com

❷ $f(h) = f(0)(h + 1)$

Se x estiver perto o suficiente de h, temos que

$$f(x) \approx f'(h)(x - h) + f(h)$$

substituindo x por $2h$ e usando $f'(h) = f(h)$,

$$f(2h) = f'(h)(2h - h) + f(h)$$

$$f(2h) \approx f(h)(h) + f(h)$$

$$f(2h) \approx f(h)(h + 1)$$

Substituiremos então $f(h) = f(0)(h + 1)$ na nossa equação.

$$f(2h) = f(0)(h + 1)(h + 1)$$

$$f(2h) = f(0)(h + 1)^2$$

Da mesma forma, substituímos $3h$, $4h$, $5h$, ..., por x e fazemos $mh = 1$.

$$f(1) = f(mh) = f(0)(h + 1)^m$$

De forma semelhante,

$$f(2) = f(2mh) = f(0)(h + 1)^{2m} = f(0)\{(1 + h)^m\}^2$$

$$f(3) = f(3mh) \approx f(0)(h + 1)^{3m} = f(0)\{(1 + h)^m\}^3$$

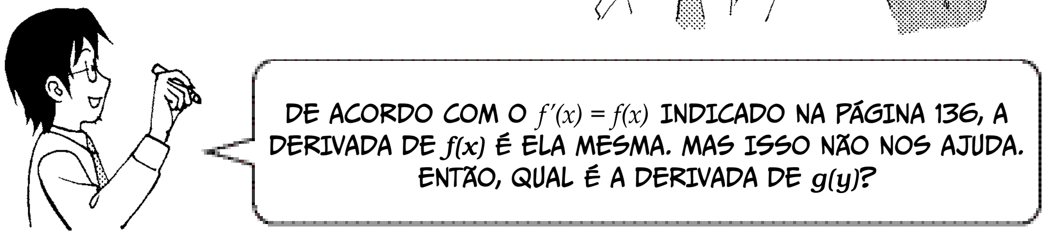
Então, ficamos com

$f(n) = f(0)a^n$ em que usamos $a = (1 + h)^m$

que sugere uma função exponencial.*

* Como $mh = 1$, $h = \frac{1}{m}$. Então, $f(1) = f(0)\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$. Se fizermos $m \to \infty$ aqui, $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \to e$, ou *constante de Euler*, um número que vale cerca de 2,718. Então, $f(1) = f(0) \times e$, que é consistente com a discussão da página 141.

2. Em seguida descobriremos que $f(x)$ existe com certeza e com o que ele se parece.



❸ $$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Como temos isso em geral,*

❹ $$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y}$$

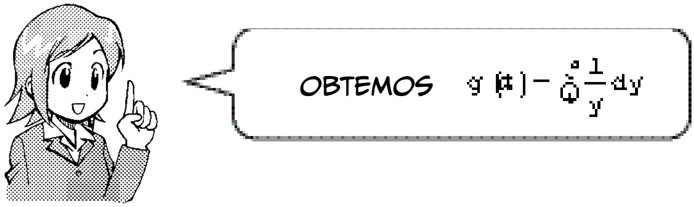
obtemos esse resultado, que mostra que a derivada da função inversa $g(y)$ é explicitamente dada por $\frac{1}{y}$.

Agora, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo:

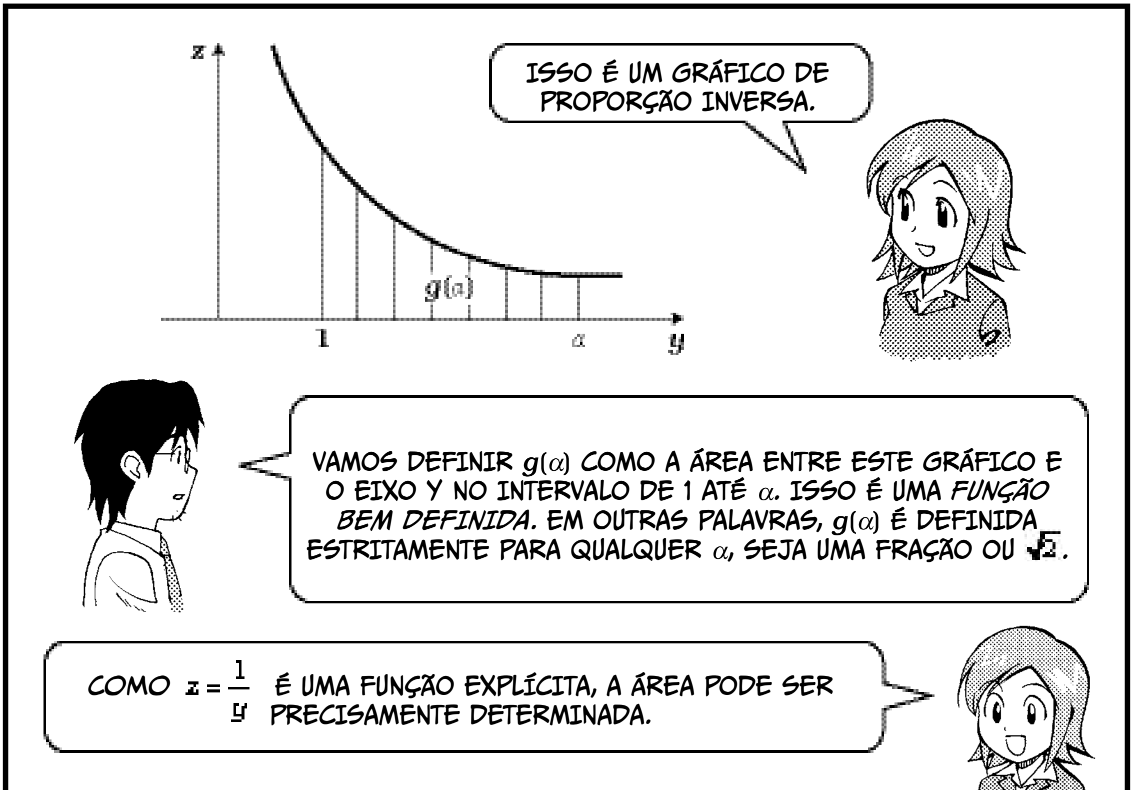
❺ $$\int_1^{\alpha} \frac{1}{y}dy = g(\alpha) - g(1)$$

Como sabemos agora que $g'(y) = \frac{1}{y}$, descobrimos que a função $g(\alpha)$ é obtida integrando $\frac{1}{y}$ de 1 até α.

Se assumirmos que $g(1) = 0$ aqui . . .



* Como mostrado na página 75, se a função inversa de $y = f(x)$ é $x = g(y)$, $f'(x)\, g'(y) = 1$.



Como $g(1) = \int_1^1 \frac{1}{y}dy = 0, \int_1^a \frac{1}{y}dy = g(a) - g(1)$ que satisfaz ❺.

Então, descobrimos a função inversa $g(y)$, a área abaixo da curva, que também nos dá a função original $f(x)$.

RESUMO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

❶ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ é vista como sendo a taxa de crescimento.

❷ $y = f(x)$ que satisfaz $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1$ é a função que tem um crescimento constante de 1.

Isso é uma função exponencial que satisfaz

$$f'(x) = f(x)$$

❸ Se a função inversa de $y = f(x)$ é dada por $x = g(y)$, temos

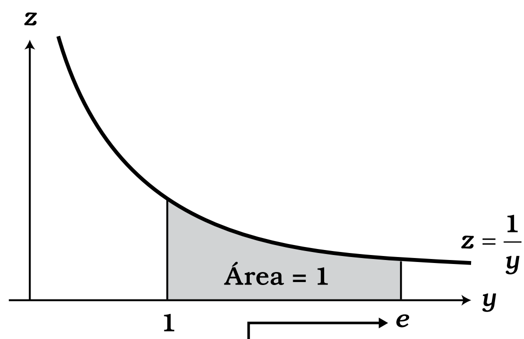
$$g'(y) = \frac{1}{y} \quad \star$$

❹ Se definimos $g(\alpha)$, podemos encontrar a área de $h(y) = \dfrac{1}{y}$,

$$g(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{1}{y}\,dy$$

A função inversa de $f(x)$ é a função que satisfaz ★ e $g(1) = 0$.

❺



e é um número irracional que vale cerca de 2,7178.

Definimos *e* (a base do logaritmo natural) como o y que satisfaça $g(y) = 1$. Ou seja, ele é o α para o qual a área entre a curva $1 / y$ e o eixo y no intervalo de 1 a α é igual a 1.

Como $f(x)$ é uma função exponencial, podemos escrever, usando a constante a_0,

$$f(x) = a_0 a^x$$

Como $f(g(1)) = f(0) = a_0 a^0 = a_0$ e $f(g(1)) = 1$, temos

$$f(g(1)) = 1 = a$$

E então sabemos que

$$f(x) = a^x$$

De forma semelhante, como

$$f(g(e)) = f(1) = a^1 \quad \text{e}$$

$$f(g(e)) = e$$

$$e = a^1$$

Então, temos que $f(x) = e^x$.

A função inversa $g(y)$ disso é $\log_e y$, que pode ser escrito simplesmente como $\ln y$ (ln representa o logaritmo natural).

Agora, vamos reescrever de ❷ a ❹ em termos de e^x e $\ln y$.

❻ $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow (e^x)' = e^x$

❼ $g'(y) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow (\ln y)' = \frac{1}{y}$

❽ $g(a) = \int_1^a \frac{1}{y}\,dy \Leftrightarrow \ln y = \int_1^a \frac{1}{y}\,dy$

❾ Para definir 2^x, uma função dos bits, para qualquer número real x, fazemos

$$f(x) = e^{(\ln 2)x} \quad (x \text{ é qualquer número real})$$

A razão disso é mostrada a seguir. Como e^x e $\ln y$ são funções inversas uma da outra,

$$e^{\ln 2} = 2$$

Portanto, para qualquer número natural x, temos

$$f(x) = (e^{\ln 2})^x = 2^x$$

MAIS APLICAÇÕES DO TEOREMA FUNDAMENTAL

Outras funções podem ser expressas na forma $f(x) = x^{\alpha}$. Algumas delas são

$$\frac{1}{x} = x^{-1}, \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \frac{1}{x^3} = x^{-3}, \ldots$$

Para essas funções em geral, a fórmula que encontramos anteriormente mostra-se verdadeira.

FÓRMULA 4-2: REGRA DA POTÊNCIA PARA DERIVAÇÃO

$$f(x) = x^{\alpha} \qquad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

EXEMPLO:

Para $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $f'(x) = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

Para $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

PROVA:

Vamos expressar $f(x)$ em termos de e. Percebendo que $e^{\ln x} = x$, temos que

$$f(x) = x^{\alpha} = \left(e^{\ln x}\right)^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

Então,

$$\ln f(x) = \alpha \ln x$$

Derivando ambos os lados, lembrando que a derivada de $\ln w = \dfrac{1}{w}$, e aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

Portanto,

$$f'(x) = \alpha \times \frac{1}{x} \times f(x) = \alpha \times \frac{1}{x} \times x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Se $h(x) = f(x)\,g(x)$, obtemos da regra do produto de derivadas,

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Então, como a função (a antiderivada) que dá $f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ após a derivação fica $f(x)\,g(x)$, obtemos do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Usando a regra da soma de integração, obtemos a seguinte fórmula.

FÓRMULA 4-3: INTEGRAÇÃO POR PARTES

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Como exemplo, vamos calcular:

$$\int_0^\pi x \operatorname{seno} x \, dx$$

Chutamos que a resposta da integral terá uma forma semelhante a $x \cos x$, então dizemos que $f(x) = x$ e $g(x) = \cos x$. Então tentamos,

$$\int_0^\pi x' \cos x \, dx + \int_0^\pi x(\cos x)' \, dx = f(x)g(x)\Big|_0^\pi$$

Podemos avaliar que

$$- \; f(\pi)g(\pi) \quad f(0)g(0)$$

Substituindo em nossas funções originais de $f(x)$ e $g(x)$, descobrimos que

$$= \pi\cos\pi - 0\cos 0 = \pi(-1) - 0 = -\pi$$

Podemos usar esse resultado em nossa primeira equação.

$$\int_0^\pi x' \cos x \, dx + \int_0^\pi x(\cos x)' dx - \pi$$

Então obtemos:

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx + \int_0^{\pi} x(-\operatorname{seno} x)\, dx = -\pi$$

Rearranjando mais ainda, resolvendo os sinais, descobrimos que:

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx - \int_0^{\pi} x \operatorname{seno} x\, dx = -\pi$$

E você pode ver aqui que temos a integral original, mas agora atemos em termos que podemos realmente resolver! Resolvendo para nossa função original:

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{seno} x\, dx = \int_0^{\pi} \cos x\, dx + \pi$$

Lembre-se que $\int \cos x\, dx = \operatorname{seno} x$, e você pode ver que

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{seno} x\, dx = \operatorname{seno} x\Big|_0^{\pi} + \pi$$

$$= \operatorname{seno}\pi - \operatorname{seno} 0 + \pi$$

$$= 0 - 0 + \pi = \pi$$

Aqui está.

EXERCÍCIOS

1. $\tan x$ é uma função definida como $\operatorname{seno} x / \cos x$. Obtenha a derivada de $\tan x$.
2. Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

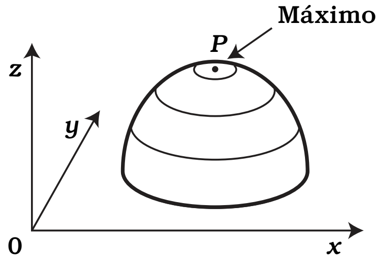
3. Obtenha x tal que $f(x) = xe^x$ seja mínimo.
4. Calcule

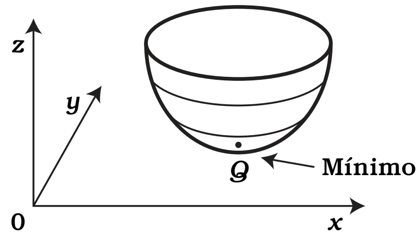
$$\int_0^{e} 2x \ln x\, dx$$

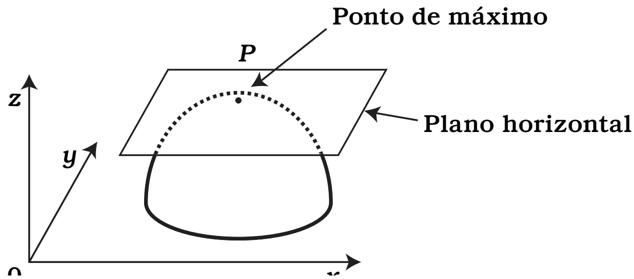
Uma dica: suponha que $f(x) = x^2$ e $g(x) = \ln x$, e use a integração por partes.

CONDIÇÕES DE PONTOS EXTREMOS

Os *extremos* de uma função com duas variáveis $f(x, y)$ está no ponto em que seu gráfico equivale ao topo de uma montanha ou à base de um vale.







Como o plano tangente ao gráfico no ponto P ou Q é paralelo ao plano x-y, devemos ter

$$f(x, y) = p(x - a) + q(y - b) + f(a, b)$$

com $p = q = 0$ na função linear de aproximação.

Como

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} (= f_x) \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y} (= f_y)$$

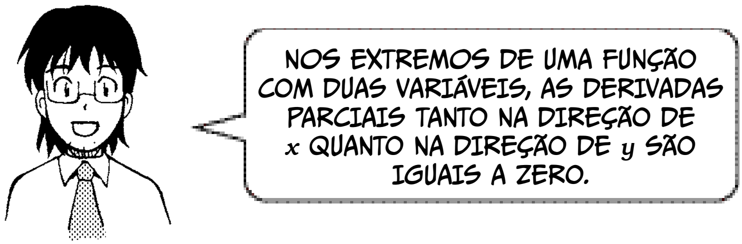
a condição de extremidade[*] é, caso $f(x, y)$ tenha um extremo em $(x, y) = (a, b)$,

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

* O oposto disso não é verdadeiro. Em outras palavras, mesmo que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, f nem sempre terá um extremo em $(x, y) = (a, b)$. Então, essa condição apenas escolhe os candidatos a ponto extremo.



EXEMPLO

Vamos encontrar o mínimo de $f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 2)^2$. Primeiro, vamos encontrá-lo algebricamente.

Como

$$(x - y)^2 \geq 0 \quad (y - 2)^2 \geq 0$$

$$f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$$

Se substituirmos $x = y = 2$ aqui,

$$f(2, 2) = (2 - 2)^2 + (2 - 2)^2 = 0$$

Disso, $f(x, y) \geq f(2, 2)$ para todo (x, y). Em outras palavras, $f(x, y)$ tem um mínimo igual a zero em $(x, y) = (2, 2)$.

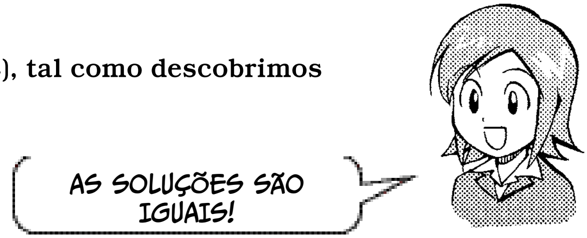
Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x - y)(-1) + 2(y - 2) = -2x + 4y - 4$. Se fizermos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

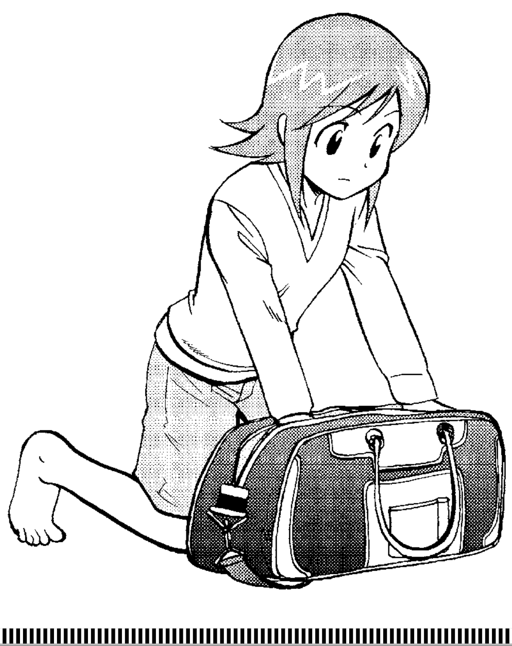
e resolvermos esse sistema de equações,

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

descobrimos que $(x, y) = (2, 2)$, tal como descobrimos acima.

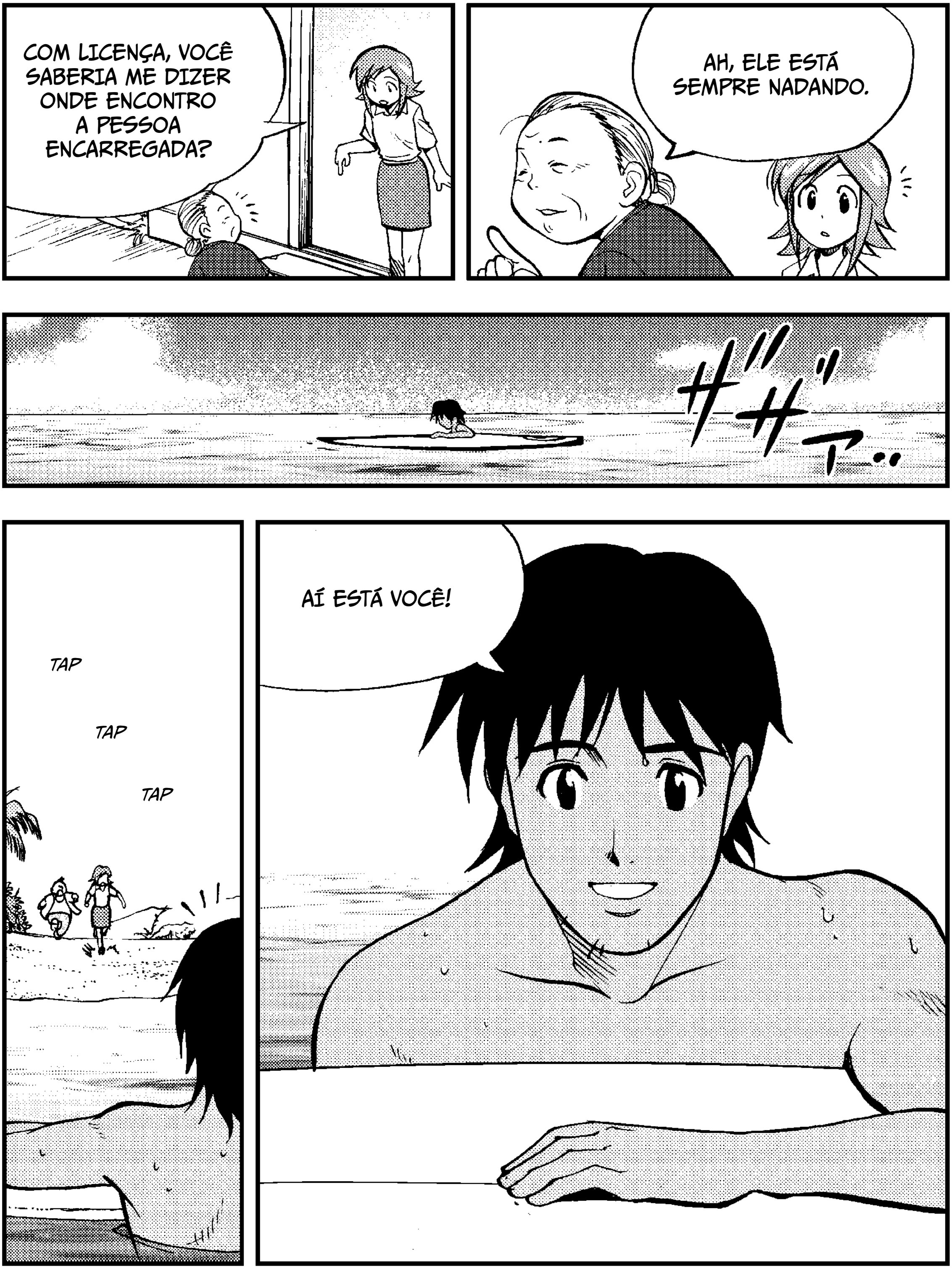


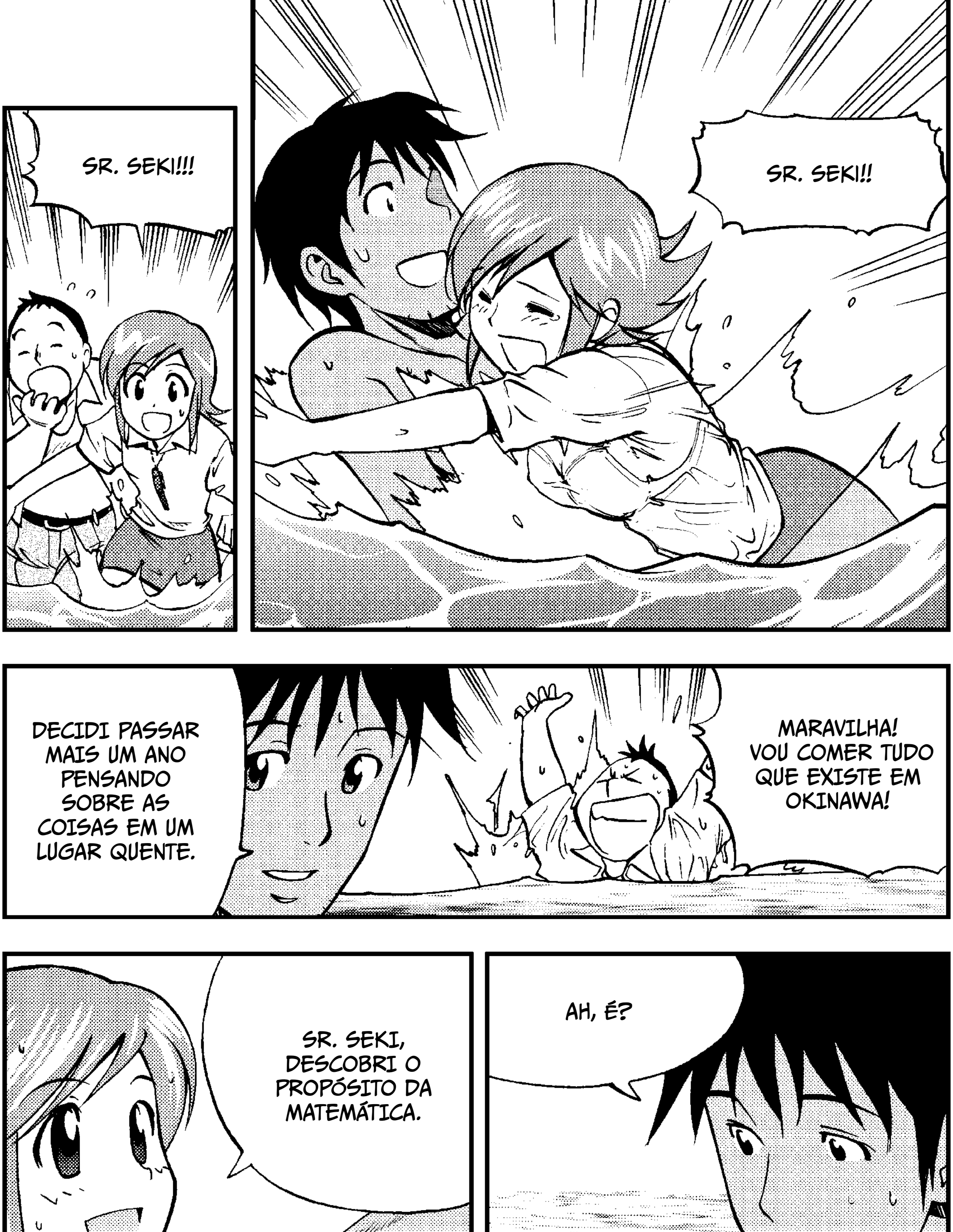
EPÍLOGO:
PARA QUE SERVE A MATEMÁTICA?




AEROPORTO DE NAHA
那覇空
UFA, QUE CALOR!
NÃO IMPORTA PARA ONDE ME MANDEM, FAREI O MEU MELHOR.
BEM, ONDE ESTÁ O ESCRITÓRIO DA *ASAGAKE TIMES* EM OKINAWA?


O QUÊÊ!?!
あさがけ新聞 沖縄支局
ESCRITÓRIO DA ASAGAKE TIMES EM OKINAWA
HUUUHH
ESSA SITUAÇÃO ESTÁ SOANDO FAMILIAR DEMAIS PRA MIM!
VOCÊ?!?
NÃO ME DIGA QUE VOCÊ É O CHEFE DESSE ESCRITÓRIO?!?
SEM CHANCE! TAMBÉM ACABEI DE CHEGAR DO AEROPORTO.
AI, QUE BOM!
MAS VOCÊ NÃO ESTÁ AQUI TEMPO O SUFICIENTE PARA JÁ ESTAR DORMINDO!! SEU FOLGADO!
AIÊ!
QUEM TÁ ENCARREGADO DESTE ESCRITÓRIO?
TAP
TAP


COM LICENÇA, VOCÊ SABERIA ME DIZER ONDE ENCONTRO A PESSOA ENCARREGADA?
AH, ELE ESTÁ SEMPRE NADANDO.
TAP
TAP
TAP
AÍ ESTÁ VOCÊ!



SR. SEKI!!!
SR. SEKI!!
DECIDI PASSAR MAIS UM ANO PENSANDO SOBRE AS COISAS EM UM LUGAR QUENTE.
MARAVILHA! VOU COMER TUDO QUE EXISTE EM OKINAWA!
SR. SEKI, DESCOBRI O PROPÓSITO DA MATEMÁTICA.
AH, É?


DESCREVER COISAS QUE NÃO PODEM SER DESCRITAS COM PALAVRAS.
BEM, ENTÃO, NORIKO, SUPONHA QUE O HORIZONTE SEJA O EIXO X...
QUÊ?
O QUE VAMOS COMER HOJE À NOITE? HMMM, MACARRÃO SOA BEM.
AMANHÃ SERÁ OUTRO GRANDE DIA.
ワーイ
HI HI